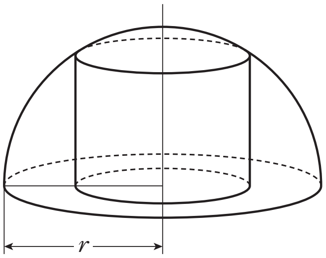
第３講　図形と方程式，微分法・積分法

1 [1]　r を正の実数とする．円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ と放物線 $y=x^2$ が $x>0$ の範囲に異なる2つの交点P，Qをもつような r の値の範囲は **ア** である．さらに，この r の範囲で $\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ r の値は $r=$ **イ** である．

[2]　図のように半径 r の半球面に円柱が内接している．円柱の体積が最大になるのは円柱の高さが **ウ** のときであり，その円柱の体積は **エ** である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 xy 平面上に 3 つの放物線 $C_1 : y=x^2$，$C_2 : y=bx^2$ $(0<b<1)$ および C_3 がある．C_3 は C_2 上の点 $(1,\ b)$ を頂点とし，点 $(0,\ b-1)$ を通り，上に凸である．また，C_1 と C_3 は，ただ 1 つの共有点 A をもち，A を通る共通の接線 ℓ をもつ．

(1) b の値と C_3 の方程式を求めよ．

(2) A の座標と ℓ の方程式を求めよ．

(3) C_1，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とし，C_3，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を T とする．$S=T$ が成り立つことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上に放物線 $D: y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ と D 上の点 P$(-2,\ 2)$ がある．また，P における D の接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) 円 C は，半径が r で中心が $(r,\ 2)$ であり，直線 ℓ と接しているとする．C と ℓ との接点 A の x 座標を a とするとき，A を通り ℓ と垂直に交わる直線の方程式を a で表せ．また，その直線が C の中心を通ることを用いて r を a で表せ．

(3) (2)の r の値を求めよ．

(4) (2)の C の外側で D と C と ℓ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　図形と方程式，微分法・積分法

[1]　展開図が円と半径 ℓ の扇形からなる直円錐を考える．ℓ が一定のとき，この円錐の体積を最大にするような円錐の高さを ℓ で表すと $\dfrac{\ell}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$ であり，扇形の中心角は $120\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 度である．

[2]　座標平面上に曲線 $C：y=-x^2+1$ と点 $\mathrm{P}(a,\ 3a^2+1)$ がある．ただし，$a>0$ とする．P を通る C の 2 本の接線のうち，C との接点の x 座標が小さい方を ℓ_1 とし，C と ℓ_1 の接点を Q とする．また，ℓ_1 と Q で垂直に交わる直線を ℓ_2 とする．C と ℓ_1 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_1，C と ℓ_2 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_2 とするとき，$S_2=2S_1$ が成り立つ a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　図形と方程式，微分法・積分法

1 ［1］ r を正の実数とする．円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ と放物線 $y=x^2$ が $x>0$ の範囲に異なる２つの交点 P，Q をもつような r の値の範囲は［ア］である．さらに，この r の範囲で $\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ r の値は $r=$［イ］である．

放物線 $y=x^2$ の軸は y 軸であり，円の中心も y 軸上にある．

$x^2+(y-1)^2=r^2$ と $y=x^2$ より

$y+(y-1)^2=r^2$　　$y^2-y+1-r^2=0$ ……①

図形の対称性より，この y の２次方程式①が正の実数解をもてば，その解１つにつき，x 座標が正である交点と負である交点が１つずつ存在する．

よって $x>0$ に異なる２つの交点 P，Q をもつのは，方程式①が異なる２つの正の実数解をもつときである．

$f(y)=y^2-y+1-r^2=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}-r^2$ とおくと，$f(y)$ の軸は　$y=\dfrac{1}{2}>0$

$f(0)=1-r^2>0$　より　$(r+1)(r-1)<0$　　よって　$-1<r<1$

①の判別式 $D>0$　より　$1-4(1-r^2)>0$　$r^2>\dfrac{3}{4}$

よって　$r<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r<1}$　……ア

このとき，$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とすると，α^2，β^2 は①の２解より解と係数の関係から

$\alpha^2+\beta^2=1$　……②，$\alpha^2\beta^2=1-r^2$　……③

$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より

$(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$　　$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\dfrac{5}{4}$

②より　$1-2\alpha\beta+1^2-4\alpha^2\beta^2=\dfrac{5}{4}$

$\alpha\beta=X$ とおき X について整理すると

$16X^2+8X-3=0$　　$(4X-1)(4X+3)=0$

$X=\alpha\beta>0$ より　$X=\dfrac{1}{4}$

つまり　$\alpha\beta=\dfrac{1}{4}$，$\alpha^2\beta^2=\dfrac{1}{16}$

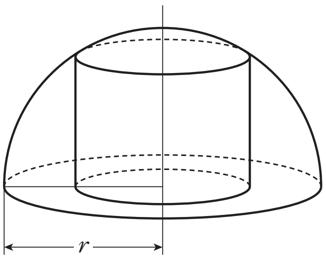
これと③より，$1-r^2=\dfrac{1}{16}$　　$r^2=\dfrac{15}{16}$

$r>0$ より　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$　……イ

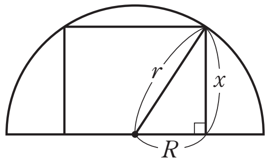
©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［2］ 図のように半径 r の半球面に円柱が内接している．円柱の体積が最大になるのは円柱の高さが **ウ** のときであり，その円柱の体積は **エ** である．



円柱の高さを x，底面の半径を R とおくと，三平方の定理より



$R^2=r^2-x^2$

円柱の体積を $V(x)$ とすると

$V(x)=\pi R^2x=\pi(r^2-x^2)x=\pi(-x^3+r^2x)$

$V'(x)=\pi(-3x^2+r^2)$

$-3x^2+r^2=0$

つまり　$x=\pm\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ のとき $V'(x)=0$

$0<x<r$ より $V(x)$ の増減表は右図．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{r}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(r)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗		↘	

$V\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)=\pi\left(r^2-\dfrac{r^2}{3}\right)\cdot\dfrac{r}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi r^3$

したがって，円柱の高さが $\boldsymbol{\dfrac{r}{\sqrt{3}}}$ …ウのとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi r^3}$ …エをとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 xy 平面上に 3 つの放物線 $C_1 : y=x^2$，$C_2 : y=bx^2$ $(0<b<1)$ および C_3 がある．C_3 は C_2 上の点 $(1,\ b)$ を頂点とし，点 $(0,\ b-1)$ を通り，上に凸である．また，C_1 と C_3 は，ただ 1 つの共有点 A をもち，A を通る共通の接線 ℓ をもつ．

(1) b の値と C_3 の方程式を求めよ．

(2) A の座標と ℓ の方程式を求めよ．

(3) C_1，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とし，C_3，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を T とする．$S=T$ が成り立つことを示せ．

(1) C_3 の式を $y=a(x-1)^2+b$ とおくと，$(0,\ b-1)$ を通るので

$b-1=a+b$　　$a=-1$

よって　$C_3 : y=-(x-1)^2+b$

$C_1 : y=x^2$ より，$y'=2x$

$C_3 : y=-(x-1)^2+b$ より，$y'=-2(x-1)$

C_1 と C_3 のただ 1 つの共有点 A の x 座標を s とすると

$2s=-2(s-1)$

よって　$s=\dfrac{1}{2}$

したがって A の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$s^2=-(s-1)^2+b$ より，$b=s^2+(s-1)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{C_3 : y=-(x-1)^2+\dfrac{1}{2}}$

(2) (1)より，$\mathbf{A}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

また接線 ℓ の方程式は　$y=1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ より　　$\boldsymbol{y=x-\dfrac{1}{4}}$

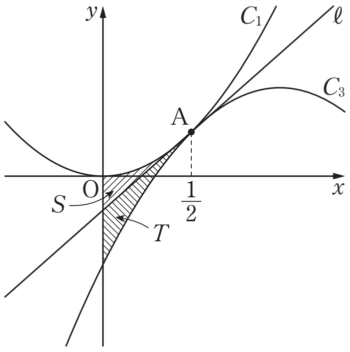
(3) $S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{x^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=0-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{24}$

$T=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)-\left\{-(x-1)^2+\frac{1}{2}\right\}\right]dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{24}$



したがって　$S=T$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面上に放物線 D：$y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ と D 上の点 P$(-2,\ 2)$ がある．また，P における D の接線を ℓ とする．

(1)　ℓ の方程式を求めよ．

(2)　円 C は，半径が r で中心が $(r,\ 2)$ であり，直線 ℓ と接しているとする．C と ℓ との接点 A の x 座標を a とするとき，A を通り ℓ と垂直に交わる直線の方程式を a で表せ．また，その直線が C の中心を通ることを用いて r を a で表せ．

(3)　(2)の r の値を求めよ．

(4)　(2)の C の外側で D と C と ℓ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+x+2$　より　$y'=x+1$

P$(-2,\ 2)$ における接線の方程式は

$y=-1(x+2)+2=-x$　　したがって　ℓ：$\boldsymbol{y=-x}$

(2)　点 A は ℓ 上の点より　A$(a,\ -a)$

よって点 A を通る ℓ の法線の方程式は

$y=1\cdot(x-a)-a$

つまり　$\boldsymbol{y=x-2a}$

この直線が円 C の中心 $(r,\ 2)$ を通ることより

$2=r-2a$　よって　$\boldsymbol{r=2a+2}$

(3)　円 C が直線 ℓ と接するので，中心 $(r,\ 2)$ と直線 ℓ：$x+y=0$ の距離が半径 r と等しい．

よって　$\dfrac{|r+2|}{\sqrt{1+1}}=r$

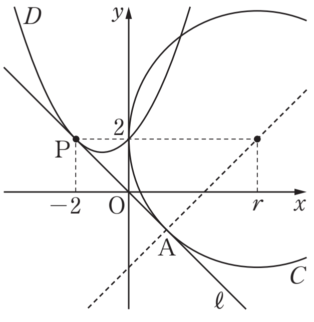
ここで右図より円の中心は直線 ℓ の上側にある．

すなわち $(r,\ 2)$ が $y>-x$ つまり $x+y>0$ の領域に存在するので，

$r+2>0$

したがって

$\dfrac{r+2}{\sqrt{2}}=r$　　$(\sqrt{2}-1)r=2$

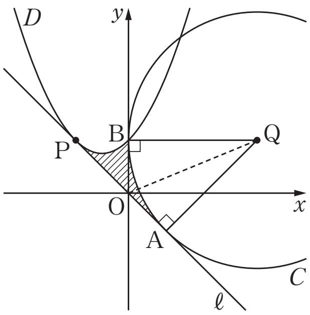


ゆえに　$\boldsymbol{r}=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)=\boldsymbol{2\sqrt{2}+2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4) (2), (3)より　$2a+2=2\sqrt{2}+2$　よって　$a=\sqrt{2}$

このとき C の中心を $\mathrm{Q}(2\sqrt{2}+2,\ 2)$，$C$ と y 軸との接点を $\mathrm{B}(0,\ 2)$ とすると，3 点 P，B，Q は直線 $y=2$ 上にある．



D，ℓ，y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+x+2\right)-(-x)\right\}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

△OAQ≡△OBQ より，

四角形 OBQA＝△OBQ×2＝$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\sqrt{2}+2)\times 2=4\sqrt{2}+4$

四角形 OBQA において，∠OAQ＝∠OBQ＝90°，∠AOB＝135°　より　∠BQA＝45°

よって

扇形 QBA＝$\pi(2\sqrt{2}+2)^2\times\frac{45^\circ}{360^\circ}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi$

したがって求める面積 S は，

$$S=\frac{4}{3}+(4\sqrt{2}+4)-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi=\boldsymbol{\frac{16+12\sqrt{2}}{3}-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

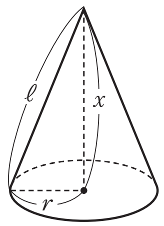
第３講　図形と方程式，微分法・積分法

[1]　展開図が円と半径 ℓ の扇形からなる直円錐を考える．ℓ が一定のとき，この円錐の体積を最大にするような円錐の高さを ℓ で表すと $\dfrac{\ell}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$ であり，扇形の中心角は $120\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 度である．

[2]　座標平面上に曲線 $C : y=-x^2+1$ と点 $\mathrm{P}(a,\ 3a^2+1)$ がある．ただし，$a>0$ とする．P を通る C の 2 本の接線のうち，C との接点の x 座標が小さい方を ℓ_1 とし，C と ℓ_1 の接点を Q とする．また，ℓ_1 と Q で垂直に交わる直線を ℓ_2 とする．C と ℓ_1 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_1，C と ℓ_2 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_2 とするとき，$S_2=2S_1$ が成り立つ a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

解答例

[1]　直円錐の底面の半径を r，高さを x とすると，$r=\sqrt{\ell^2-x^2}$



よって，この円錐の体積を $V(x)$ とすると

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2x=\frac{\pi}{3}(\ell^2-x^2)x=\frac{\pi}{3}(-x^3+\ell^2x)$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}(-3x^2+\ell^2)$$

$x=\pm\dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$ のとき　$V'(x)=0$

$0<x<\ell$ より，$V(x)$ の増減表は右図．

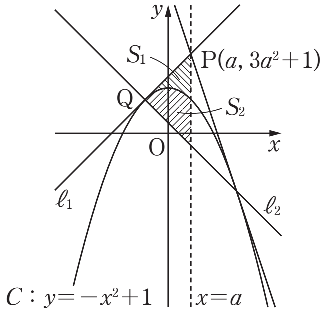
x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(ℓ)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	最大	↘	

よって，体積を最大にするような高さは $x=\dfrac{\ell}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

このとき $r=\sqrt{\ell^2-\dfrac{\ell^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ell$ であり，扇形の中心角を θ 度とすると

$$\theta=360\times\frac{r}{\ell}=360\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=120\sqrt{\mathbf{6}}\ (\text{度})$$

[2]　$C : y=-x^2+1$　より　$y'=-2x$



C 上の点 $(t,\ -t^2+1)$ における接線の方程式は

$y=-2t(x-t)-t^2+1$　つまり　$y=-2tx+t^2+1$

この接線が $\mathrm{P}(a,\ 3a^2+1)$ を通るとき

$3a^2+1=-2ta+t^2+1$

$t^2-2at-3a^2=0$

$(t-3a)(t+a)=0$

よって　$t=3a,\ -a$

$a>0$ より　接点の x 座標が小さいのは　$t=-a$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって，ℓ_1：$y=2ax+a^2+1$

$$S_1=\int_{-a}^{a}\{(2ax+a^2+1)-(-x^2+1)\}dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2ax+a^2)dx$$

$$=\int_{-a}^{a}(x+a)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+a)^3\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{3}(2a)^3=\frac{8}{3}a^3$$

また，ℓ_2：$y=-\dfrac{1}{2a}(x+a)-a^2+1=-\dfrac{1}{2a}x-a^2+\dfrac{1}{2}$

$x=a$ のとき　$y=-a^2$

点 $(a,\ -a^2)$ を A とすると

$$S_2=\triangle \mathrm{APQ}-S_1$$

ここで　$\triangle \mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\times 2a\times(3a^2+1+a^2)=4a^3+a$　より

$$S_2=4a^3+a-\frac{8}{3}a^3=\frac{4}{3}a^3+a$$

よって $S_2=2S_1$ が成り立つのは

$$\frac{4}{3}a^3+a=\frac{16}{3}a^3$$

$$4a^3-a=0$$

$$a(4a^2-1)=0$$

$$a=0,\ \pm\frac{1}{2}$$

$a>0$ より　$a=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。